УДК 532.135:532.5

Едуард БІЛЕЦЬКИЙ,
Юрій ТОЛЧИНСЬКИЙ

МОДЕЛЮВАННЯ РЕОЛОГІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ В'ЯЗКОПЛАСТИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ У ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЯХ

Переважна кількість параметрів в харчових технологіях визначаються станом різноманітних реологічних властивостей матеріалів, що переробляються [1, с. 35]. Зазвичай закон стану матеріалів встановлюється в ході експериментальних досліджень, а його результати враховуються у харчовій та хімічній технологіях. Цей підхід має не тільки безперечну перевагу – тісний зв'язок конкретного матеріалу та моделі його реологічної поведінки, а й недолік – методична складова такої моделі незначна. Проте є інший шлях, який базується на застосуванні деяких основних моделей реологічної поведінки: ступенева, в'язко-пластична моделі тощо [2, с. 78]. При такому підході основна модель використовується як початкова, а результати експериментальних досліджень накладаються на результати розрахунків, основаних на ній. Розбіжності між експериментальними й розрахунковими результатами коригуються за додатковими елементами, що ускладнюють початкову модель [3, с. 26].

Такий підхід є більш універсальним, ніж перший, і частіше використовується дослідниками, що й зумовило застосування його в цій роботі, метою якої є дослідження властивостей моделі в'язкопластичної течії з визначенням границь твердого ядра й швидкості його руху.

Для цього взято модель течії бінгамовської рідини в прямокутному каналі черв'ячної (шнекової) машини. У рамках цієї моделі отримано рівняння течії в прямокутному каналі подовжнього типу з довільним розподілом граничних швидкостей. Ці рівняння мають алгебраїчну природу й відображають деякі основні риси диференціально-алгебраїчної системи рівнянь у напругах для моделі Бінгама.

Рівняння моделі мають вигляд:

$$\frac{(1-\gamma_i^+)^2}{1+\kappa^2\rho_i^+(1-\gamma_i^+)}-\frac{(1+\gamma_i^-)^2}{1+\kappa^2\rho_i^-(1+\gamma_i^-)}=\frac{2\mu(W_i^+-W_i^-)}{l_i dP/d\zeta_i};$$

$$\frac{\gamma_i^+}{1+\kappa^2\rho_i^+(1-\gamma_i^+)}-\frac{\gamma_i^-}{1+\kappa^2\rho_i^-(1+\gamma_i^-)}=\frac{\tau_0}{dP/d\zeta_i}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2\rho_i^+(1-\gamma_i^+)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2\rho_i^-(1+\gamma_i^-)^2}}\right);$$

$$\upsilon_{ki}=\frac{W_i^+ + W_i^-}{2}-\frac{l_i}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial\zeta_i}\left[\frac{(1-\gamma_i^+)^2}{1+\kappa^2\rho_i^+(1-\gamma_i^+)^2}+\frac{(1+\gamma_i^-)^2}{1+\kappa^2\rho_i^-(1+\gamma_i^-)^2}\right]; \quad (1)$$

$$\upsilon_z=-\frac{l_i}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial\zeta_i}\frac{(1\mp\xi_i)^2}{1+\kappa^2\rho_i^\pm(1\mp\gamma_i^\pm)}\pm\frac{l_i}{\mu}\frac{\partial P}{\partial\zeta_i}\frac{\gamma_i^\pm(1\mp\xi_i)}{1+\kappa^2\rho_i^\pm(1\mp\gamma_i^\pm)}+W_i^\pm;$$

$$\gamma_i^\pm=\frac{\Gamma_i^\pm}{l_i},\ \zeta_i=\frac{z}{l_i},$$

де $\Gamma_i^\pm$ – границі твердого ядра;

P – подовжній тиск у прямокутному каналі;

$\kappa = h/a$; h – висота каналу; a – ширина каналу;

μ – в'язкість бінгамовської рідини;

τ_0 – поріг плинності бінгамовської рідини;

$W_i^\pm$ – граничні швидкості паралельної пари границь;

υ_{ki} – швидкість руху твердого ядра;

υ_z – швидкість поздовжньої течії бінгамовської рідини.

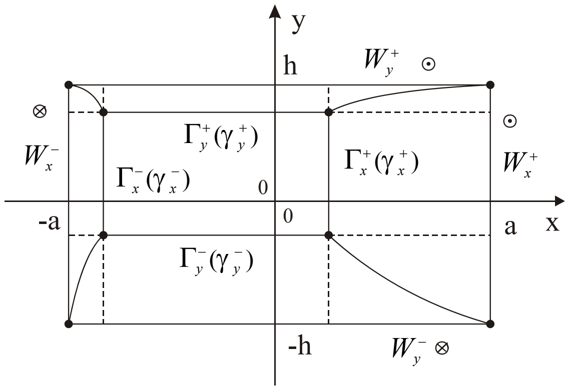
У формулі (1) індекс i набуває значення x і y, де x і y – поперечні координати в перерізі прямокутного каналу; якщо $i = x$, то $l_i = h$, а якщо $i = y$, то $l_i = y$. Тоді $W_y^{\pm}$ – швидкості границь, розташованих відповідно вище й нижче за ядро, $W_x^{\pm}$ – швидкості границь, розташованих відповідно справа й зліва від ядра.

Величини $\rho_i^{\pm}$ визначаються так:

$$\rho_y^+ = \frac{W_x^+ + W_x^- - W_y^+ - \upsilon_k}{W_y^+ - \upsilon_k}; \; \rho_x^+ = \frac{W_y^+ + W_y^- - W_x^+ - \upsilon_k}{W_x^+ - \upsilon_k}; \qquad (2)$$

$$\rho_y^- = \frac{W_x^+ + W_x^- - W_y^- - \upsilon_k}{W_y^- - \upsilon_k}; \; \rho_x^- = \frac{W_y^+ + W_y^- - W_x^- - \upsilon_k}{W_x^- - \upsilon_k}.$$

На *рисунку* наведено модель в'язко-пластичної течії в прямокутному каналі черв'ячної машини.



Модель в'язко-пластичної течії в прямокутному каналі черв'ячної машини

Рівняння (1) і (2) є системою рівнянь із великою нелінійністю, рішення якої можна отримати чисельно. Головні особливості моделі також можна з'ясувати в наявному вигляді. Для цього необхідно досліджувати граничні випадки рішень вище за зазначену модель. Дані рівняння мають специфічну властивість за параметром κ – відношенням сторін прямокутника, що лежить у перерізі каналу. Ця властивість полягає в тому, що $\gamma_y^{\pm}$ (к→0) = $\gamma_x^{\pm}$ (к→∞); $\gamma_y^{\pm}$ (к→∞) = $\gamma_x^{\pm}$ (к→0), тому достатньо дослідити систему рівнянь (1) і (2) тільки для $i = y$ (з таким успіхом можна й для $i = x$). Якщо $\kappa \to 0$, є тверде ядро, яке має в перерізі смугу, а сам прямокутний канал перетворюється на плаский. Для такого каналу границі твердого ядра описуються рівняннями [3]:

$$\gamma_y^{\pm} = \frac{1}{2}\frac{\mu(W_y^+ - W_y^-)}{h\tau_0}\frac{\gamma_h}{1-\gamma_h} \pm \gamma_h; \; \gamma_h = \frac{\tau_0}{dP/d\zeta_h}; \qquad (3)$$

$$\gamma_x^{\pm} = \frac{1}{2}\frac{\mu(W_x^+ - W_x^-)}{a\tau_0}\frac{\gamma_a}{1-\gamma_a} \pm \gamma_a; \; \gamma_a = \frac{\tau_0}{dP/d\zeta_a}.$$

Перше рівняння відноситься до плаского каналу зі сторонами, паралельними осі *ox*, чому відповідає $\kappa \to 0$, а друге – до плаского каналу зі сторонами, паралельними осі *oy*, чому відповідає $\kappa \to \infty$.

Система рівнянь для $i = y$ і $\kappa \to 0$ має такий вигляд (після отримання основних доданків за невеликим значенням параметра κ):

$$\frac{1-\gamma_y^+}{\kappa^2 \rho_y^+} - \frac{1+\gamma_y^-}{\kappa^2 \rho_y^-} = \frac{2\mu (W_y^+ - W_y^-)}{\kappa^2 a\, dP/d\zeta_a}; \tag{4}$$

$$\frac{\gamma_y^+}{\kappa^2 \rho_y^+ (1-\gamma_y^+)} - \frac{\gamma_y^-}{\kappa^2 \rho_y^- (1+\gamma_y^-)} = \frac{\tau_0}{\kappa dP/d\zeta_a}\left(\frac{1}{\kappa \rho_y^+ (1-\gamma_y^+)} - \frac{1}{\kappa \rho_y^- (1+\gamma_y^-)}\right).$$

У рівняннях (4) зроблено перехід від змінної ζ_h до змінної ζ_a, щоб явно виділити параметр κ, за яким здійснюється граничний перехід. Якщо виконати низку простих перетворень, то від рівнянь (4) можна прийти до таких:

$$\frac{1-\gamma_y^+}{\rho_y^+} - \frac{1+\gamma_y^-}{\rho_y^-} = \frac{2\mu}{dP/d\zeta_a}(W_y^+ - W_y^-); \tag{5}$$

$$\frac{1-\tau_0/(dP/d\zeta_a)}{(\rho_y^+)^2}\frac{\rho_y^-}{1-\gamma_y^+} + \frac{1-\tau_0/(dP/d\zeta_a)}{(\rho_y^-)^2}\frac{\rho_y^+}{1+\gamma_y^-} = \frac{1}{\rho_y^+} + \frac{1}{\rho_y^-}.$$

Рівняння (5) легко вирішити відносно величин $(1 \mp \gamma_y^\pm)/\rho_y^\pm$, оскільки вони подібні до квадратного рівняння. Матимемо рішення:

$$\frac{1-\gamma_y^+}{\rho_y^+} = \frac{b^+ + b^- - \dfrac{2\mu (W_y^+ - W_y^-)}{a(dP/d\zeta_a)}}{2} + \sqrt{\left(\frac{b^+ + b^- - \dfrac{2\mu (W_y^+ - W_y^-)}{a(dP/d\zeta_a)}}{2}\right)^2 + \frac{b^- 2\mu (W_y^+ - W_y^-)}{a(dP/d\zeta_a)}}; \tag{6}$$

$$\frac{1+\gamma_y^-}{\rho_y^-} = \frac{b^+ + b^- + \dfrac{2\mu (W_y^+ - W_y^-)}{a(dP/d\zeta_a)}}{2} + \sqrt{\left(\frac{b^+ + b^- + \dfrac{2\mu (W_y^+ - W_y^-)}{a(dP/d\zeta_a)}}{2}\right)^2 + \frac{b^- 2\mu (W_y^+ - W_y^-)}{a(dP/d\zeta_a)}};$$

$$b^{+} = \frac{\rho_y^{-}\tau_0 /(dP / d\zeta_a)}{\rho_y^{+}(\rho_y^{+} + \rho_y^{-})};\; b^{-} = \frac{\rho_y^{+}\tau_0 /(dP / d\zeta_a)}{\rho_y^{-}(\rho_y^{+} + \rho_y^{-})}.$$

Формули (5) і (6) дають граничні значення рішень системи рівнянь (2) і (3) за умови, що відома величина υ_k. Залишаючи цю обставину поки без уваги, необхідно звернутися до загального вигляду системи рівнянь (2) і (3), звідки виходить, що точні рішення цих рівнянь залежать тільки від величини κ^2, якщо не враховувати залежності від інших параметрів. Це означає, що рішення рівнянь (2) і (3) повинно задовольняти загальним умовам:

$$\lim_{\kappa\to 0}\gamma_y^{\pm}(\kappa^2) = \gamma_y^{\pm}(\kappa = 0);\; \gamma_y^{\pm}(\kappa) = \gamma_y^{\pm}(\kappa = 0) f(\kappa^2) + \gamma_y^{\pm}(\kappa \to \infty) g(\kappa^2);$$

$$\lim_{\kappa\to\infty}\gamma_y^{\pm}(\kappa^2) = \gamma_y^{\pm}(\kappa = \infty);\; \lim_{\kappa\to 0} f(\kappa^2) = 1;\; \lim_{\kappa\to\infty} f(\kappa^2) = 0; \tag{7}$$

$$\lim_{\kappa\to 0} g(\kappa^2) = 0;\; \lim_{\kappa\to\infty} g(\kappa^2) = 1.$$

Цим умовам задовольняє безліч функцій f і g, серед яких простими є функції $f=1/(1+\kappa^2)$ і $g=\kappa^2/(1+\kappa^2)$), і загальний вираз для $\gamma_y^{\pm}(\kappa)$ можна записати таким чином:

$$\begin{aligned}\gamma_y^{\pm} = {} & \gamma_y^{\pm}\left(\kappa = 0,\, \frac{\tau_0}{dP / d\zeta_h},\, \frac{\mu(W_y^{+} - W_y^{-})}{h\; dP / d\zeta_h}\right)\frac{1}{1+\kappa^2} + \\ & + \gamma_y^{\pm}\left(\kappa = \infty,\, \frac{\tau_0}{dP / d\zeta_a},\, \frac{\mu(W_y^{+} - W_y^{-})}{a\; dP / d\zeta_a}\right)\frac{\kappa^2}{1+\kappa^2}.\end{aligned} \tag{8}$$

Враховуючи зроблене вище зауваження відносно зв'язку граничних значень величин $\gamma_y^{\pm}$ і $\gamma_x^{\pm}$, можна для останніх величин записати готовий результат:

$$\begin{aligned}\gamma_x^{\pm} = {} & \gamma_x^{\pm}\left(\kappa = 0,\, \frac{\tau_0}{dP / d\zeta_h},\, \frac{\mu(W_x^{+} - W_x^{-})}{h\; dP / d\zeta_h}\right)\frac{1}{1+\kappa^2} + \\ & + \gamma_x^{\pm}\left(\kappa = \infty,\, \frac{\tau_0}{dP / d\zeta_a},\, \frac{\mu(W_x^{+} - W_x^{-})}{a\; dP / d\zeta_a}\right)\frac{\kappa^2}{1+\kappa^2}.\end{aligned} \tag{9}$$

Для визначення швидкості руху твердого ядра υ_k необхідно враховувати, що у рамках моделі, яка визначається рівняннями (2) і (3), є два вирази – один через границі ядра $\gamma_y^{\pm}$, інший – через границі ядра $\gamma_x^{\pm}$. Саме тому обидва вирази повинні приводити до одного й того ж результату. Так, можна зробити висновок: υ_k має вигляд такої суми:

$$\upsilon_k = \upsilon_{kx}/2 + \upsilon_{ky}/2\,. \tag{10}$$

Ось чому в рівняннях (1) υ_{ki} слід підставляти вирази $\gamma_y^{\pm}$ і $\gamma_x^{\pm}$ за (9). Вираз (10) з урахуванням останнього зауваження є нелінійним рівнянням відносно швидкості υ_k, оскільки ця швидкість входить до величин $\rho_x^{\pm}$ і $\rho_y^{\pm}$. Через велику складність та інформативність виразів (9) і (10) можна уникнути проблеми рішення цього рівняння, сформулювавши для величини υ_k гіпотезу. Використовуючи цю гіпотезу як деяке наближення, можна вичислити швидкість υ_k. Спосіб вибору відповідної гіпотези не єдиний. Можливо вибрати в якості такої швидкості середню швидкість усіх границь. Як вагові множники можна використовувати частку периметра прямокутника для цієї швидкості відносно усього периметра прямокутника. Інший спосіб полягає в тому, щоб як швидкість υ_k взяти величину, пропорційну максимальній швидкості течії Пуазейля в прямокутному каналі. Множником може виступати відношення швидкості твердого ядра Пуазейлевої течії бінгамовської рідини в круглій трубі до максимального значення такої ж течії в аналогічній трубі, але ньютонівської рідини. Перший спосіб краще підходить для течій, в яких течія рухомих границь значно перевищує різницю тисків на кінцях каналу, а другий – для течій з переважаючим впливом різниці тисків.

Вираз (10) можна визначити точніше, коли як граничні вирази використовувати не лише швидкості $\upsilon_{\pm}$ від $\gamma_i^{\pm}(\kappa{=}0)$ і $\gamma_i^{\pm}(\kappa{=}\infty)$, а й наступні доданки в розкладанні системи рівнянь (1) для $\gamma_i^{\pm}$. Оскільки рішення залежить від κ^2, то це мають бути розкладання за ступенями κ^2. Якщо для визначеності величини $\gamma_y^{\pm}$ представити у вигляді рядів $\gamma_y^{\pm}(\kappa) = \gamma_y^{\pm}(\kappa = 0) + \kappa^2\gamma_{y2}^{\pm} + \ldots$, то система рівнянь для другого наближення за κ^2 має вигляд:

$$\gamma_{y2}^{+} - \gamma_{y2}^{-} = \frac{\gamma_h}{2}\left[(\rho_{y0}^{+})^2(1-\gamma_{y0}^{+})^2 + (\rho_{y0}^{-})^2(1+\gamma_{y0}^{-})\right] + \gamma_{y0}^{+}(1-\gamma_{y0}^{+})^2\rho_{y0}^{+} - \gamma_{y0}^{-}(1+\gamma_{y0}^{-})^2\rho_{y0}^{-};$$

$$\gamma_{y2}^{+}(1-\gamma_{y0}^{+}) + \gamma_{y2}^{-}(1+\gamma_{y0}^{-}) = \frac{(1-\gamma_{y0}^{+})^2\rho_{y0}^{\pm}(1+\gamma_{y0}^{-})^2\rho_{y0}^{-}}{2}, \tag{11}$$

де $\gamma_{y0}^{\pm}$ – значення величин $\gamma_y^{\pm}(\kappa = 0)$; $\rho_{y0}^{\pm}$ – значення величин $\rho_y^{\pm}(\kappa = 0)$.

Рівняння (11) є системою двох лінійних рівнянь з відомими коефіцієнтами й правою частиною, які сформовані відомими величинами $\gamma_{y0}^{\pm}$. Результат її рішення, якщо праві частини (11) позначити через $f_1(\gamma_{y0}^{\pm})$ і $f_2(\gamma_{y0}^{\pm})$, має такий вигляд:

$$\gamma_{y2}^{+} = \frac{f_1(1+\gamma_{y0}^{-}) - f_2}{\gamma_{y0}^{+} + \gamma_{y0}^{-}}; \; \gamma_{y2}^{-} = \frac{f_2 - f_1(1-\gamma_{y0}^{+})}{\gamma_{y2}^{+} + \gamma_{y2}^{-}}. \qquad (12)$$

При значенні параметра $\kappa \to \infty$ також є можливість розкласти величини $\gamma_y^{\pm}$ в ряд за малим параметром, який дорівнює $1/\kappa^2$: $\gamma_y^{\pm}(\kappa \to \infty) = \gamma_{y\infty}^{\pm} + (1/\kappa^2)\tilde{\gamma}_{y2}^{\pm} + \ldots$. Якщо такі розкладання підставити в рівняння (1), то для других наближень за невеликим значенням параметра $1/\kappa^2$ виходять рівняння:

$$\frac{\tilde{\gamma}_{y2}^{+}}{\rho_{y0}^{+}} + \frac{\tilde{\gamma}_{y2}^{-}}{\rho_{y0}^{-}} = g_1; \; \tilde{\gamma}_{2y}^{+} \frac{(1-2\gamma_{y0}^{+})}{\rho_{y0}^{+}(1-\gamma_{y0}^{+})^2} - \tilde{\gamma}_{2y}^{-} \frac{(1+2\gamma_{y0}^{-})}{\rho_{y0}^{-}(1+\gamma_{y0}^{-})^2} = g_2; \qquad (13)$$

$$g_1 = \frac{2+\gamma_{y0}^{-}}{\rho_{y0}^{-}} - \frac{2+\gamma_{y0}^{+}}{\rho_{y0}^{+}}; \; g_2 = g_2(\gamma_{y0}^{\pm}, \rho_{y0}^{\pm}, \gamma_h).$$

Результат рішення системи рівнянь (13) можна записати таким чином:

$$\tilde{\gamma}_{2y}^{+} = \rho_{y0}^{+}(1-\gamma_{y0}^{+})^2 \frac{[g_1(1+2\gamma_{y0}^{-}) - g_2(1+\gamma_{y0}^{-})^2]}{(1+2\gamma_{y0}^{-})(1-\gamma_{y0}^{+})^2 - (1-2\gamma_{y0}^{+})(1+\gamma_{y0}^{-})}; \qquad (14)$$

$$\tilde{\gamma}_{2y}^{-} = \rho_{y0}^{-}(1+\gamma_{y0}^{-})^2 \frac{[g_2(1-\gamma_{y0}^{+})^2 - g_1(1-2\gamma_{y0}^{+})]}{(1+2\gamma_{y0}^{-})(1-\gamma_{y0}^{+})^2 - (1-2\gamma_{y0}^{+})(1+\gamma_{y0}^{-})}.$$

Тепер вирази (13) і (14) слід додати у формулу (8) і таким чином відобразити внесок других наближень так, що ця формула матиме вигляд:

$$\gamma_y^{\pm} = (\gamma_{0y}^{\pm} + \kappa^2\gamma_{y2}^{\pm})\frac{1}{1+\kappa^2} + (\gamma_{y\infty}^{\pm} + (1/\kappa^2)\tilde{\gamma}_{y2}^{\pm})\frac{\kappa^2}{1+\kappa^2}. \qquad (15)$$

Розкладання для величин $\gamma_y^{\pm}$ можуть бути продовжені у вигляді рядів за κ і $1/\kappa^2$ поблизу $\kappa = 0$ та $\kappa = \infty$, але при цьому громіздкість обчислень сильно зростає. Обчислення складових аналогічних розкладань для величин $\gamma_x^{\pm}$ не потрібно завдяки наявності зв'язків між ними й величинами $\gamma_y^{\pm}$, відображених у формулах (7). Для величин $\gamma_x^{\pm}$ справедливе таке ж представлення, як (15) з точністю до заміни індексу y на індекс x.

Важливою характеристикою в'язко-пластичної течії є витрата. Для її обчислення треба визначити області інтегрування в прямокутнику поперечного перерізу каналу, які відповідають різним виразам для подовжньої швидкості течії. Вирази для швидкостей, наведені у рівняннях (1), означають, що швидкість υ_z задано переривчасто. Отже, виникає питання: як розташовані границі областей – елементів розбиття прямокутника (див. *рисунок*)? Для знаходження цих границь необхідно використовувати умову безперервності швидкості. За наявності двох представлень для швидкості υ_z це означає, що повинні існувати лінії, які починаються й закінчуються у вершинах ядра й прямокутника, що лежать в перерізі каналу. Всього таких ліній – чотири. Рівняння цих ліній задають зв'язок між змінними ξ_x і ξ_y. Через те, що вирази (1) для υ_z є квадратні тричлени за відповідними змінними. Лінії, які визначають із умов безперервності, обов'язково проходять через вершини ядра й прямокутника тому, що представлення для швидкості υ_z задовольняють граничним умовам на контурах ядра та прямокутника. Рівняння ліній скорочено записуються так: $\upsilon_z^+(\xi_y) = \upsilon_z^+(\xi_x)$; $\upsilon_z^+(\xi_y) = \upsilon_z^-(\xi_x)$; $\upsilon_z^-(\xi_y) = \upsilon_z^+(\xi_x)$; $\upsilon_z^-(\xi_y) = \upsilon_z^-(\xi_x)$. У них верхні знаки "плюс" і "мінус" відповідають верхнім і нижнім знакам у рівняннях (1). Ураховуючи, що $\upsilon_z^{\pm}(\xi_y)$ і $\upsilon_z^{\pm}(\xi_x)$ є квадратичними функціями, залежності ξ_y від ξ_x, тобто рівняння ліній, що з'єднують вершини ядра й прямокутника, є квадратні рівняння, рішення для яких записуються таким чином:

$$1 \mp \xi_y = \mp\gamma_y^{\pm} \pm \sqrt{(\gamma_y^{\pm})^2 + 2[1+\kappa^2\rho_y^{\pm}(1\mp\gamma_y^{\pm})](W_x^{\pm} - W_y^{\pm}) + [1+\kappa^2\rho_y^{\pm}(1\mp\gamma_y^{\pm})/\kappa^2 + \rho_x^{\pm}(1\mp\gamma_x^{\pm})] \times [(1\mp\xi_x)^2 \pm 2\gamma_x^{\pm}(1\mp\xi_x)]}\,. \tag{16}$$

Рівняння (16) відноситься до усіх чотирьох ліній одночасно.

Маючи рівняння ліній, можна вичислити витрату як інтеграл за чотирма областями, обмеженими лініями $x = \pm a$, $y = \pm h$, $x = \gamma_x^{\pm}$, $y = \gamma_y^{\pm}$, $\xi_y(\xi_x)$. Загальна формула для витрати $\dot{V}$ в'язко-пластичної течії є сумою таких інтегралів:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{V}}{ah} &= \upsilon_k(\gamma_x^+ - \gamma_x^-)(\gamma_y^+ - \gamma_y^-) + (\gamma_x^+ - \gamma_x^-)\left[\int_{\gamma_y^+}^{1} \upsilon_y^+ d\xi_y + \int_{-1}^{\gamma_y^-} \upsilon_y^- d\xi_y\right] + \\ &+ (\gamma_x^+ - \gamma_x^-)\left[\int_{\gamma_x^+}^{1} \upsilon_x^+ d\xi_x + \int_{-1}^{\gamma_x^-} \upsilon_x^- d\xi_x\right] + \mathrm{M}, \end{aligned} \tag{17}$$

де через M позначена сума восьми інтегралів за малими прямокутниками, для яких лінії $\xi_y(\xi_x)$ є криволінійними діагоналями (див. *рисунок*).

Ці інтеграли мають будову $\int \upsilon_y^{\pm} d\xi_y \int dx$ і $\int \upsilon_x^{\pm} d\xi_x \int dy$, а як границі інтегрування виступають інтервали $[\xi_y^{\pm}(\xi_x^{\pm}), \pm 1]$, $[\gamma_y^{\pm}, \pm 1]$ і $[\gamma_x^{\pm}, \pm 1]$, що розставляються в порядку відповідно до границь малих прямокутників. Перше інтегрування в цих інтегралах виконується без утруднень, а друге – дуже складно й може вирішуватися чисельно. Для завдань інженерної практики криволінійні діагоналі можна замінити прямолінійними. У цьому випадку інтегрування виконується без утруднень.

Ґрунтуючись на представленні (1) для швидкості υ_z й поділу прямокутника в перерізі каналу, нескладно вичислити величину енергії дисипації, яка приходиться на один метр уздовж довжини каналу. Для цього треба вичислити похідні за координатами x і y від швидкості υ_z, піднести результати до другого ступеня, скласти й проінтегрувати за площею прямокутника. Виконавши прості перетворення для енергії дисипації $\dot{e}$ на один метр довжини, маємо такий інтеграл:

$$\frac{2\dot{e}}{\mu} = \iint d\xi_x d\xi_y \left\{ \frac{R_y^2}{\kappa}\left[(1-\gamma_y^{\pm})^2 + \xi_y^2 \mp 2(1-\gamma_y^{\pm})\xi_y\right] + \kappa R_x^2\left[(1-\gamma_x^{\pm})^2 + \xi_x^2 \mp 2(1-\gamma_x^{\pm})\xi_x\right] \right\} ; \quad (18)$$

$$R_y = \frac{h^2}{\mu}\frac{dP}{dz}\frac{1}{1+\kappa^2 \rho_y^{\pm}(1 \mp \gamma_y^{\pm})}; \; R_x = \frac{a^2}{\mu}\frac{dP}{dz}\frac{1}{\kappa^2 + \rho_y^{\pm}(1 \mp \gamma_x^{\pm})^2}.$$

Із області інтегрування виключається ядро течії. Результати інтегрування за (18) представляють суму чотирьох і восьми доданків від інтегрування за кутовими прямокутниками з криволінійними діагоналями. Таким чином, загальний результат записується так:

$$\frac{2\dot{e}}{\mu} = \frac{R_y^2}{3\kappa}(2 + \gamma_y^{+3} - \gamma_y^{-3})(\gamma_x^{+} - \gamma_x^{-}) + \frac{R_x^2}{3}\kappa(2 + \gamma_x^{+3} - \gamma_x^{-3})(\gamma_y^{+} - \gamma_y^{-}) + N, \quad (19)$$

де N – сума восьми доданків – результатів інтегрування (17) в інтервалах, вказаних вище. Самі доданки є інтегралами $\int \left(\frac{\partial \upsilon_y^{\pm}}{\partial \xi_y}\right)^2 d\xi_y \int dx$, $\int \left(\frac{\partial \upsilon_x^{\pm}}{\partial \xi_x}\right)^2 d\xi_x \int dy$.

Результати цієї роботи свідчать про те, що викладена модель дає змогу отримати кінцеві аналітичні вирази для границь ядра, швидкості ядра й поля течії бінгамовської рідини в прямокутному каналі, а також вичислити величини витрат та енергії дисипації в'язко-пластичної течії. У рамках цієї моделі можливі уточнюючі процедури. Рівняння моделі допускають різні види спрощень, які можуть бути трансформовані в інженерні методики. Отримані результати використовують для розрахунку робочих камер черв'ячних машин, оскільки ці камери представляють собою в дещо спрощеному варіанті послідовно з'єднані канали. Ділянки перехідної течії на границі, що розділяє сусідні канали, невиправдано малі, що дає змогу з великою точністю вважати течію в прямокутних каналах єдиним видом течії. У різних каналах змінюються тільки *a, h, κ* і $W_x^{\pm}$, $W_y^{\pm}$, *dP/dz*, причому останні є невідомими, які необхідно визначити. Використовуючи принципи безперервності потоку й тиску, за допомогою рівнянь моделі можна знайти тиск і витрату як функції швидкості обертання черв'яка й геометрії каналів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Райнер М.* Реология / М. Райнер. — М. : Наука ; ГРФМЛ, 1965. — 223 с.
2. *Фрейденталь А*. Математические теории непружной сплошной среды / А. Фрейденталь, Х. Гейрингер. — М. : ГИТТЛ, 1962. — 432 с.
3. *Кутателадзе С. С.* Анализ подобия в теплофизике / с. с. Кутателадзе. — Новосибирск : Наука. Сиб. отд., 1982. — 280 с.