УДК 519.87:621.6

Ігор РУЖИЦЬКИЙ

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПОВЕДІНКИ РІДИННИХ ВАНТАЖІВ ПРИ ТРАНСПОРТУВАННІ

На основі варіаційних принципів і методів нелінійної механіки розглянуто задачу про нелінійну динаміку сумісного руху обмеженого об'єму рідини та резервуара еліпсоїдальної форми. Наводяться результати побудови математичної моделі системи, що складається з еліпсоїдального резервуару та рідини з вільною поверхнею, яка його частково заповнює. Представлено чисельні результати реалізації задачі.

Ключові слова: математична модель, коливання рідини, резервуар, еліпсоїдальна форма.

Ружицкий И. Математическая модель поведения жидких грузов при транспортировке. *На основе вариационных принципов и методов нелинейной механики рассмотрена задача о нелинейной динамике совместного движения ограниченного объема жидкости и резервуара эллипсоидальной формы. Приведены результаты построения математической модели системы, состоящей из эллипсоидального резервуара и жидкости со свободной поверхностью, которая его частично заполняет. Представлены численные результаты реализации задачи.*

Ключевые слова: математическая модель, колебания жидкости, резервуар, эллипсоидальная форма.

Постановка проблеми. На сьогодні актуальною є проблема моделювання нелінійних коливань рідини з вільною поверхнею у випадку нециліндричної форми порожнини, яку вона займає. Інтерес до цієї задачі зумовлений активним розвитком сучасної техніки, що потребує побудови моделей, які б ефективно описували реальні фізичні процеси, що відбуваються в системах, невід'ємною складовою яких є резервуари з частковим рідинним наповненням. До них належать системи, призначені для збереження і транспортування рідинного наповнення, літальні апарати з рідинним паливом або вантажем, нафтосховища, реактори. Врахування рухомості рідини з вільною поверхнею є важливим фактором, який визначає динаміку руху таких об'єктів, що вкрай важливо, оскільки відносна маса рідини в багатьох системах транспортування, зберігання та переробки рідинних наповнень перевищує 80 %.

Найбільш визначні результати дослідження динаміки нециліндричних резервуарів із рідиною отримано академіком І. Луковським [1–3] та його науковою школою. Серед відомих вітчизняних вчених у цьому напрямку досліджень працюють Г. Нариманов, Л. Докучаєв [3], О. Лимарченко [4–6], В. Кубенко, П. Ковальчук [7], М. Барняк [8], В. Троценко [9], О. Тимоха [10], а серед зарубіжних слід відмітити O. M. Faltinsen [10], H. F. Bauer [11], R. A. Ibrahim [12], J. Miles [13].

Незважаючи на те, що задачі про коливання рідин, які мають вільну поверхню в резервуарах, є класичними й активно вивчались протягом останніх років, переважну кількість результатів досліджень отримано або в рамках лінійної теорії визначення частот і форм коливань, або для резервуарів циліндричної форми. Крім того, в більшості випадків припускалося, що рух резервуара заданий. При цьому дослідження останніх років показали, що найефективнішим для задач про сумісний рух системи "резервуар-рідина" є застосування варіаційних методів.

Спираючись на досягнення зазначених науковців, на сьогодні можна стверджувати, що варіаційні алгоритми в поєднанні з методами модальної декомпозиції уможливлюють побудову нелінійних дискретних моделей коливань рідини, які пройшли апробацію у випадках кінематичного та динамічного збудження руху (періодичні та нестаціонарні режими). Однак при цьому залишаються недостатньо дослідженими задачі про сумісний рух систем, які складаються з резервуарів сферичної та еліпсоїдальної форми з частковим рідинним наповненням.

Мета – чисельна реалізація для моделі системи, що складається з резервуара та рідини, яка частково його заповнює, придатної для застосування при дослідженні процесів у порожнинах, що можуть використовуватися при транспортуванні та зберіганні рідинного наповнення, з можливістю аналізу структури отриманої системи.

Матеріали та методи. Дослідження базується на сукупному застосуванні аналітичних методів нелінійної динаміки, варіаційних методів математичної фізики до задачі у варіаційному формулюванні. Опис задачі здійснюється з використанням недекартової параметризації для області, яку займає рідинний вантаж. Для виконання умов розв’язності задачі й побудови координатних функцій, які задовольняють умові неперетікання не лише на змочуваній у незбуреному стані твердій границі, а й на певному подовженні бічної поверхні порожнини, куди досягають гребені хвилі, застосовано метод допоміжної області. На основі аналітичного виключення всіх кінематичних в’язей до розв’язання варіаційної задачі отримується нелінійна дискретна модель системи мінімальної розмірності, яка одержується для еліпсоїдальної форми резервуара на основі сукупного застосування класичного варіаційного принципу й методу модальної декомпозиції.

Результати дослідження. Для ефективності використання методів модальної декомпозиції при моделюванні нелінійних коливань рідини з вільною поверхнею у випадку нециліндричної форми резервуара, *по-*

перше, необхідно ввести недекартову параметризацію області, яку займає рідина, що було вперше показано І. Луковським на класі областей конічної, сферичної, еліпсоїдальної, параболоїдальної та інших геометричних форм [1–3]. *По-друге*, необхідно виконати побудову моделі, яка включатиме достатньо велику кількість форм коливань рідини, особливо для випадку вивчення нестаціонарних режимів. При цьому необхідно враховувати, що на основі результатів досліджень відомо, що енергія, яка припадає на коливання за першою формою, становить приблизно 65 % від загальної, за другою – приблизно на рівні 25 %, за третьою – приблизно 5 %, при цьому на всі інші вищі форми разом припадає майже 5 %. *По-третє*, необхідно забезпечити виконання умов розв'язності крайової задачі про коливання рідини задоволенням умов неперетікання рідини на стінках резервуара та розвинути алгоритми й методи контролю точності розв'язків [4; 5].

На сьогодні експериментальним шляхом встановлено залежність частоти резонансного збудження коливань на вільній поверхні рідини від амплітуди тіла, що є характерним для нелінійних систем, та виявлено взаємозалежність форм коливань вільної поверхні рідини. Також встановлено, що амплітуди коливань рідини в резонансному режимі обмежені. При визначених амплітудах і частотах сили, що збуджує рух системи в одній площині, за певних умов виникає своєрідне обертання вільної поверхні рідини навколо подовжньої вісі порожнини [6]. Дослідне явище кругової хвилі пов'язане з втратою динамічної стійкості вільної поверхні рідини в деякому діапазоні параметрів сили, яка збурює, та виникненням якісно нових видів деформації вільної поверхні, що приводять до її просторового руху. Приведена характерна властивість профілю хвиль, які стають несиметричними, а саме спостерігається перевищення висоти горба хвилі над глибиною впадини.

Пояснення цих явищ неможливо отримати в рамках використання лінійної теорії через її обмеженість, яка обумовлена тим, що процес лінеаризації має дуже сильний вплив на структуру вихідних рівнянь і призводить до значних змін. Здебільшого зазначені явища, встановлені й підтверджені в результаті експериментальних досліджень, не відбиваються в розв'язках, отриманих у випадку використання лінійної теорії, навіть на якісному рівні. Результати аналізу приведених досліджень свідчать про суттєві недоліки розв'язків, які будуються на основі використання лінійної теорії, та про обґрунтованість застосування для аналітичного опису коливних систем, що складаються з резервуарів і рідини, яка їх частково заповнює, нелінійної постановки.

Нелінійність крайових умов на вільній поверхні та невідомість вільної поверхні й області визначення потенціалу швидкостей рідини створюють основну складність для розв'язання нелінійних крайових задач динаміки обмеженого об'єму рідини з вільною поверхнею.

Необхідно враховувати, що границя області змінюється в часі. Характерно, що у випадку порожнин нециліндричної форми область визначення форми збуреної поверхні змінюється в часі й не збігається з незбуреною вільною поверхнею. Ця додаткова складність (геометрична нелінійність) заважає сформулювати задовільний алгоритм розв'язання нелінійних задач для порожнини довільної форми. Отже, оскільки розв'язок задачі динаміки рідини в такій області ускладнено, для опису руху рідини аналогічно роботам [1–6] вводиться недекартова параметризація області, яку займає рідина, і в наведеній нижче новій параметризації еліпсоїдальна форма області, яку займає рідина, отримує циліндричну форму:

$$\alpha = \frac{r}{f(z)}; \beta = \frac{z}{H}, f(z) = a\sqrt{1 - \frac{(z+H-b)^2}{b^2}}, \tag{1}$$

де через $r = f(z)$ позначено рівняння твірної тіла обертання (еліпса), задане в циліндричній системі координат; H – глибина заповнення порожнини; r, θ, z – циліндричні координати; α, θ, β – криволінійні координати системи, в якій область, яку займає рідина, набуває циліндричної форми, що дає змогу представити рівняння вільної поверхні рідини в розв'язаному відносно вертикальної координати β вигляді. Далі це дає змогу застосувати методи теорії збурень і метод Канторовича для побудови нелінійної моделі динаміки резервуару з рідиною.

При цьому задача про рух обмеженого об'єму рідини приймає форму:

$$\Delta\varphi_0 = 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} - f'\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = 0, r = f(z); \tag{3}$$

$$L(\xi,\phi_0) = \frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{1}{f^2}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\frac{\partial\phi_0}{\partial\alpha} + \frac{1}{\alpha^2 f^2}\frac{\partial\xi}{\partial\theta}\frac{\partial\phi_0}{\partial\theta} - \frac{\alpha f'}{f}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\frac{\partial\phi_0}{\partial z} - \frac{\partial\phi_0}{\partial z} = 0; \tag{4}$$

$$\beta = \frac{1}{H}\xi(\alpha,\theta,t). \tag{5}$$

У такій постановці задачі рівняння (2) відповідає умові нерозривності рідини, причому – це потенціал швидкостей рідини в її відносному русі. Рівняння (3), яке є умовою непротікання рідини через змочувану границю резервуару, як і (2), виписується в старих змінних, оскільки їх виконання забезпечується розв'язанням задачі про координатні функції в старій параметризації, а (4) – відповідає умові непротікання через вільну поверхню та, як і рівняння вільної поверхні (5), виписано в новій системі параметризації. Наведена сукупність рівнянь являє собою не повне формулювання задачі динаміки сумісного руху рідини й резервуара еліпсоїдальної форми, а набір кінематичних обмежень задачі. Також слід звернути увагу на те, що підкреслений член в останньому рівнянні виникає через нециліндричність області, яку займає рідина. Динамічна ж гранична умова на вільній поверхні *S*, що необхідна для повного формулювання та отримується внаслідок застосування варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \tag{6}$$

та може бути записана в такому вигляді:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 + \vec{\nabla}\varphi\cdot\dot{\vec{\varepsilon}} + g\xi = 0\,. \tag{7}$$

Застосування варіаційного принципу до задачі дає змогу отримати рівняння руху резервуару й рідини, яка його частково заповнює, та сили взаємодії між ними. Аналіз умов розв'язності нелінійної крайової задачі показує, що побудова ефективної скінченновимірної моделі системи для дослідження коливань рідини в резервуарі, що має форму еліпсоїда обертання, вимагає:

- задоволення з високою точністю умов неперетікання рідини через незмочену в незбуреному стані стінку бака;
- забезпечення виконання умов неперетікання рідини через стінки резервуара вище рівня незбуреної вільної поверхні, куди можуть досягати гребені нелінійних хвиль;
- задоволення вимогам збереження об'єму рідини в збуреному русі;
- забезпечення виконання зазначених умов на етапі побудови розкладів шуканих змінних, які б задовольняли всім кінематичним граничним умовам задачі, до переходу до розв'язання варіаційної задачі.

У процесі розв'язання задачі для представлення розкладів шуканих змінних – збурення вільної поверхні ξ та потенціалу швидкостей, як і в роботах [4–6], представлялися у такому вигляді:

$$\varphi = \sum_i b_i\psi_i(\alpha,\beta)T_i(\theta);\ \xi = \bar{\xi}(t) + \sum_i a_i\overline{\psi}_i(\alpha)T_i(\theta), \tag{8}$$

$$\text{де } \overline{\psi}_i(\alpha) = \left.\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial z}\right)\right|_{\beta=0} = \left.\left(\frac{1}{H}\frac{\partial\psi_i}{\partial\beta} - \frac{\alpha f'}{f}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha}\right)\right|_{\beta=0}. \tag{9}$$

Тут $T_i(\theta)$ – тригонометричні функції, а система функцій $\overline{\psi}_i(\alpha)$ повна на S_0. Розклади змінних для нециліндричної форми області, якою є еліпс, на відміну від випадку циліндричної області, містять член $\bar{\xi}(t)$.

Розв'язання задачі, основане на застосуванні варіаційних принципів і методів нелінійної механіки з використанням алгоритму, що забезпечує попереднє виконання та виключення кінематичних граничних умов, уможливило розробити коректну та ефективну нелінійну математичну модель для дослідження процесів нелінійної динаміки руху системи, яка складається з резервуару еліпсоїдальної форми та рідини, що частково його наповнює.

Отримані при цьому рівняння руху можна записати так:

$$\sum_i \ddot{a}_i \left\{ V_{ir}^1 + \sum_j a_j V_{irj}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k V_{irjk}^3 \right\} + \ddot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \vec{U}_r^1 + \sum_i a_i \vec{U}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{U}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{U}_{rijk}^4 \right\} =$$

$$= \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j V_{ijr}^{2*} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k V_{ijkr}^{3*} + \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \sum_i \dot{a}_i \vec{U}_{ir}^{2*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \vec{U}_{ijr}^{3*} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k \vec{U}_{ijkr}^{4*} \right\} -$$

$$- g \left\{ \sum_i a_i W_{ir}^2 + \frac{3}{2} \sum_{i,j} a_i a_j W_{ijr}^3 + 2 \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k W_{ijkr}^4 \right\}, r = 1,2,...N \qquad (10)$$

$$\frac{\rho}{(M_{ж} + M_{р})} \left\{ \sum_i \ddot{a}_i \left[\vec{U}_i^1 + \sum_j a_j \vec{U}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{U}_{ijk}^3 \right] \right\} + \ddot{\vec{\varepsilon}} =$$

$$= \frac{\vec{F}}{(M_{ж} + M_{р})} - g\vec{z}_0 - \frac{\rho}{(M_{б} + M_{р})} \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \left\{ \vec{U}_{ir}^2 + 2 \sum_k a_k \vec{U}_{ijk}^3 \right\}.$$

Необхідно звернути увагу на те, що в наведеній системі a_i та $\vec{\varepsilon}$ є незалежними узагальненими координатами. Перша група рівнянь відповідає за опис динаміки амплітуд коливань вільної поверхні рідини, а друга – за опис динаміки поступального руху резервуара. Також у рівняння входять члени, які відповідають за сили внутрішньої взаємодії між резервуаром і рідиною. Параметри нелінійної моделі визначаються в квадратурах.

Отримана система рівнянь є лінійною відносно других похідних невідомих величин, що дає можливість організувати обчислювальний процес, в якому на кожному кроці чисельного інтегрування система рівнянь буде за допомогою ЕОМ перетворюватися до нормальної форми Коші, а потім, із використанням звичайного методу Рунге-Кутта, буде виконуватись чисельне інтегрування за часом. При цьому порядок похідних у рівняннях, на етапі перетворення системи до нормальної форми Коші, знижується за рахунок введення разом із узагальненими координатами a_i – амплітудними параметрами, узагальнених швидкостей $\dot{a}_j$ як рівноправних змінних. Для чисельної реалізації моделювання коливань рідини з вільною поверхнею, за аналогією з розв'язками задач для інших форм резервуарів, для розв'язання нелінійної задачі застосовано такі координатні функції:

$$\psi_1=\psi_{11}^{\ *}\sin\theta;\psi_2=\psi_{11}^{\ *}\cos\theta;\psi_3=\psi_{01}^{\ *};\psi_4=\psi_{21}^{\ *}\sin 2\theta;\psi_5=\psi_{21}^{\ *}\cos 2\theta; \quad (11)$$

$$\psi_6=\psi_{02}^{\ *};\psi_7=\psi_{31}^{\ *}\sin 3\theta;\psi_8=\psi_{31}^{\ *}\cos 3\theta;\psi_9=\psi_{12}^{\ *}\sin\theta;\psi_{10}=\psi_{12}^{\ *}\cos\theta.$$

Детальний розгляд варіанта, коли система складається із сферичного резервуара та рідини, яка його частково наповнює, у випадку з радіусом сфери $r = 1$ та глибиною заповнення $H = 0.5$ на основі моделі із застосуванням п'яти координатних функцій, дав змогу зробити висновки про відповідність отриманих коефіцієнтів системи коефіцієнтам рівнянь у формі, що представлена в працях академіка НАН України І. О. Луковського:

$$V_{131}^2=\frac{d_6}{\mu_0},V_{232}^2=\frac{d_6}{\mu_0},V_{322}^2=\frac{d_6}{\mu_1},V_{1111}^2=\frac{d_1}{\mu_1},V_{113}^2=\frac{d_5}{\mu_1},V_{223}^2=\frac{d_5}{\mu_1},V_{311}^2=\frac{d_6}{\mu_1},V_{1122}^3=\frac{d_2}{\mu_1},$$

$$V_{142}^2=-\frac{d_4}{\mu_2},V_{151}^2=\frac{d_4}{\mu_2},V_{241}^2=-\frac{d_4}{\mu_2},V_{421}^2=-\frac{d_4}{\mu_2},V_{252}^2=-\frac{d_4}{\mu_2},V_{412}^2=-\frac{d_4}{\mu_2},V_{522}^2=-\frac{d_4}{\mu_2},$$

$$V_{511}^2=\frac{d_4}{\mu_2},V_{124}^2=\frac{d_3}{\mu_1},V_{214}^2=\frac{d_3}{\mu_1},V_{115}^2=-\frac{d_3}{\mu_1},V_{225}^2=\frac{d_3}{\mu_1},V_{1212}^3+V_{1221}^3=\frac{d_1-d_2}{\mu_2},V_{ij}^1=\delta_{ij}.$$

Варто зазначити, що в системі рівнянь, крім "поодиноких" коефіцієнтів, спостерігаються групи рівних між собою коефіцієнтів.

$V131^2* = V232^2* = -1.3009 = k_1$, $V1111^3* = V2222^3* = -3.0282 = k_2$, $V115^2 = -1.2411 = k_3$, $V1122^3 = V1122^3 = -1.1643 = k_4$, $V142^2* = V241^2* = V252^2* = -1,1033 = k_5$, $V1212^3 = V2112^3 = V1221^3 = V2121^3 = -0.932 = k_6$, $W333^3 = -0.5184 = k_7$, $V115^2* = -0.3448 = k_8$, $V511^2 = -0.2757 = k_9$, $V434^2* = V535^2* = -0.2701 = k_{10}$, $W151^3 = W511^3 = W115^3 = -0.2375 = k_{11}$, $V344^2* = V355^2* = -0.2216 = k_{12}$, $V443^2* = V553^2* = -0.1973 = k_{13}$, $V311^2* = V322^2* = -0.1647 = k_{14}$, $V311^2* = V322^2* = -0.1379 = k_{15}$, $W2211^4 = W1212^4 = W2121^4 = W1122^4 = -0.0574 = k_{16}$, $W1111^4 = W2222^4 = -0.0238 = k_{17}$, $V232^2* = 0.0888 = k_{18}$, $W2112^4 = W1221^4 = 0.0911 = k_{19}$, $V511^2* = 0.1379 = -k_{15}$, $W131^3 = W311^3 = W232^3 = W322^3 = W113^3 = W223^3 = 0.2372 = k_{20}$, $W241^3 = W421^3 = W142^3 = W252^3 = W412^3 = W522^3 = W214^3 = W225^3 = 0.2372 = -k_{11}$, $W443^3 = W553^3 = W344^3 = W434^3 = W355^3 = W535^3 = W142^3 = W214^3 = W225^3 = 0.2517 = k_{21}$, $V421^2 = V412^2 = V522^2 = 0.2757 = k_{22}$, $V311^2* = V322^2* = 0.3295 = k_{23}$, $V124^2* = V214^2* = V225^2* = 0.3448 = -k_8$, $V113^2* = V223^2* = V225^2* = 0.4033 = k_{24}$, $V2211^3* = V1122^3* = 0.6996 = k_{25}$,

$V1212^{3*} = V2121^{3*} = 0.932 = -k_6$, $V151^{2*} = 1.1033 = -k_5$, $V124^2 = V214^2 = V225^2 = 1.2411 = -k_3$, $V2112^{3*} = V1221^{3*} = 1.3967 = k_{26}$, $V113^{2*} = V223^{2*} = 1.4657 = k_{27}$, $V1111^{3*} = V2222^{3*} = 3.0282 = -k_1$, $V11^1 = V22^1 = 0.5996 = k_{28}$, $V33^1 = 0.3848 = k_{29}$, $V44^1 = V55^1 = 0.2264 = k_{30}$.

Отримані дані свідчать про те, що при дослідженні задачі про розвиток хвильового руху на вільній поверхні рідини в розглянутому осесиметричному резервуарі на основі моделі із застосуванням п’яти координатних функцій отримана система міститиме майже 100 коефіцієнтів. Проте, враховуючи наявність значної кількості груп коефіцієнтів, до рівняння входить 30 рівних між собою значень, без урахування знаку, коефіцієнтів. Це уможливлює в майбутньому перейти окремо до більш глибокого дослідження отриманої системи рівнянь, що, з математичної точки зору, може дати переваги при вивченні її особливостей.

Аналогічна група ненульових коефіцієнтів, які входять до рівняння руху, отримується і для інших випадків резервуарів при різних випадках глибини заповнення *H*. Необхідно зважати на недолік у реалізованому алгоритмі, який полягає в тому, що ефективність його застосування є прийнятною для розгляду практичних задач у випадку різних форм сферичних та еліпсоїдальних порожнин, наповнення рідини в яких не перевищуватиме рівень половини резервуара [5; 6]. Це обмежує можливість (з прийнятним рівнем точності) дослідження групи задач, в яких наповнення рідини сягатиме рівня вище середини резервуару, й у випадку таких постановок задач стимулює переходити до розвитку та застосування інших шляхів і прийомів для моделювання динамічних процесів у дослідних системах. Проте вірогідність отриманих результатів для випадку резервуарів, в яких рідинне наповнення буде нижче рівня середини резервуару, для такої моделі забезпечується коректністю постановки задачі, контролем точності виконання граничних умов, умов розв’язності задачі, законів симетрії та збереження енергії, маси, а також узгодженням одержаних результатів із результатами досліджень інших авторів на якісному рівні, а в окремих випадках і кількісно, включаючи експериментальні результати.

Висновки. Розвинені методи й алгоритми, а також одержані результати чисельного моделювання можуть застосовуватися для аналізу прикладних задач систем, що пов’язані з транспортуванням рідких вантажів і динаміки авіаційних і космічних об’єктів, розробкою алгоритмів керування й аналізом розвинення процесів сумісного руху рідини та резервуару при нестаціонарних режимах, а також для пояснення і прогнозування складних процесів хвилеутворення та взаємодії компонентів у системі, яка складається з еліпсоїдального резервуару та рідини, що його частково заповнює.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Луковский И. А.* Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость / И. А. Луковский. — К. : Наукова думка, 1990. — 295 с.
2. *Луковский И. А.* Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью / И. А. Луковский. — К. : Наукова думка, 2010. — 407 с.
3. *Нариманов Г. С.* Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью / Г. С. Нариманов, Л. В. Докучаев, И. А. Луковский. — М. : Машиностроение, 1977. — 208 с.
4. *Лимарченко О. С.* Динамика вращающихся конструкций с жидкостью / О. С. Лимарченко, Дж. Матараццо, В. В. Ясинский. — К. : Гнозис, 2002. — 304 с.
5. *Лимарченко О. С.* Побудова координатних функцій для нелінійної задачі динаміки рідини з вільною поверхнею в еліптичному резервуарі / О. С. Лимарченко, І. С. Ружицький // Вісн. Київського ун-ту. — 2009. — № 1. — С. 59—62. — (Серія "Фізико-математичні науки").
6. *Лимарченко О. С.* Зародження кругової хвилі на вільній поверхні рідини в рухомому еліпсоїді / О. С. Лимарченко, І. С. Ружицький // Вісн. Київського ун-ту. — 2009. — № 4. — С. 43—46. — (Серія "Фізико-математичні науки").
7. *Кубенко В. Д.* Аналіз стійкості циліндричних оболонок при взаємодії з рухомою рідиною / В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук, М. П. Подчасов // Доп. НАН України. — 2010. — № 5. — С. 50—56. — (Серія "Фізико-математичні науки").
8. *Барняк М. Я.* Побудова розв'язків крайових задач для рівняння Лапласа в областях з кутовими точками / М. Я. Барняк // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем : зб. пр. Ін-ту математики НАН України. — Т. 4. — К. : Ін-т математики НАН України, 2007. — С. 7—28.
9. *Троценко В. А.* Колебания жидкости в осесимметричном резервуаре с мембраной на свободной поверхности / В. А. Троценко, Р. И. Богун : зб. пр. Ін-ту математики НАН України. — Т. 5. — К. : Ін-т математики НАН України, 2008. — С. 304—333.
10. *Faltinsen O. M.* Sloshing / O. M. Faltinsen, A. N. Timokha. — Cambridge : Cambridge University press, 2009. — 608 p.
11. *Bauer H. F.* Response of viscous annular liquid layer in zero-gravity to different axial excitations of the rigid boundary plates / H. F. Bauer // Applied Scientific Research. — 1992. — Vol. 49. — P. 283—305.
12. *Ibrahim R. A.* Liquid sloshing dynamics: theory and applications / R. A. Ibrahim. — Cambridge : Cambridge University Press, 2005. — 950 p.
13. *Miles J.* Nonlinear surface waves in closed basins / J. Miles // Journ. Fluid Mech. — 1976. — Vol. 75, N 3. — P. 419—448.

Стаття надійшла до редакції 02.10.2013.

Ruzhytskyi I. Mathematical model of fluid freight behavior during transportation.

Background. Nowadays the problem of joint movement of systems that consist of reservoirs of spherical and ellipsoidal shape partially filled with liquid is not studied enough.

The aim of investigation is the numerical implementation for the model system consisting of a reservoir partially filled with fluid which will be suitable for use in the study of processes in axisymmetric non cylindrycal cavities.

Material and methods. The research is based on the combined use of analytical methods of nonlinear dynamics and variational methods of mathematical physics to the problem in variational formulation. Description of the problem is performed using non-Cartesian parameterization for the domain occupied by liquid. The method of an auxiliary domain was used to satisfy conditions of solvability of the problem and for construction of the coordinate functions that satisfy the condition of not overflow not only for the level of unperturbed state of fluid on the solid boundaries, but also on tank walls, where crests of waves can reach. Discrete model of minimal dimension which is derived for ellipsoidal forms of reservoir from the combined use of classical variational principle and the method of modal decomposition is obtained based on the analytical exclusion of all kinematic ties before solving nonlinear variational problem.

Results. The steps that are performed to solve the problem are described. The choice of analytical approaches of use for modal decomposition methods for modeling nonlinear vibrations of fluid with free surface in the case of ellipsoidal shape reservoir and subsequent numerical implementation upon receipt of a second-order differential equations for the model is justified. Linearity of the system relative to the second derivatives of unknown quantities allowed to organize the computational process in which every step of the numerical integration of systems of differential equations, using a computer, converted to Cauchy normal form, and then using standard Runge-Kutt method, numerical integration over time is performed. The case when the system consists of a spherical reservoir and fluid that partially fills it, based on the model using five coordinate functions that made it possible to draw conclusions about the compliance of the obtained coefficients, with coefficients of equations in a form that is presented in the works of Academician of NAS of Ukraine I. O. Lukovskii.

Conclusion. It is concluded that the developed methods and algorithms, and the obtained results of numerical simulations, can be used to analyze the dynamics applications at aviation and space systems, and systems associated with the transportation of liquid cargo. The obtained results of the study will help to: improve the development of control algorithms and analysis of the development of processes of compliant motion of fluid and reservoir in nonstationary regimes; explain and predict complex processes of wave generation and interactions of components in the system, "ellipsoidal reservoirfluid with free surface".

Key words: mathematical model, fluctuations of fluid, reservoir, ellipsoidal shape.

REFERENCES

1. *Lukovskij I. A.* Vvedenie v nelinejnuju dinamiku tverdogo tela s polostjami, soderzhashhimi zhidkost' / I. A. Lukovskij. — K. : Naukova. dumka, 1990. — 295 s.
2. *Lukovskij I. A.* Matematicheskie modeli nelinejnoj dinamiki tverdyh tel s zhidkost'ju / I. A. Lukovskij. — K. : Naukova dumka, 2010. — 407 s.
3. *Narimanov G. S.* Nelinejnaja dinamika letatel'nogo apparata s zhidkost'ju / G. S. Narimanov, L. V. Dokuchaev, I. A. Lukovskij. — M. : Mashinostroenie, 1977. — 208 s.

4. *Limarchenko O. S.* Dinamika vrashhajushhihsja konstrukcij s zhidkost'ju / O. S. Limarchenko, Dzh. Mataracco, V. V. Jasinskij. — K. : Gnozis, 2002. — 304 s.
5. *Lymarchenko O. S.* Pobudova koordynatnyh funkcij dlja nelinijnoi' zadachi dynamiky ridyny z vil'noju poverhneju v eliptychnomu rezervuari / O. S. Lymarchenko, I. S. Ruzhyc'kyj // Visn. Kyi'vs'kogo un-tu. — 2009. — № 1. — S. 59—62. — (Serija "Fizyko-matematychni nauky").
6. *Lymarchenko O. S.* Zarodzhennja krugovoi' hvyli na vil'nij poverhni ridyny v ruhomomu elipsoi'di / O. S. Lymarchenko, I. S. Ruzhyc'kyj // Visn. Kyi'vs'kogo un-tu. — 2009. — № 4. — S. 43—46. — (Serija "Fizyko-matematychni nauky").
7. *Kubenko V. D.* Analiz stijkosti cylindrychnyh obolonok pry vzajemodii' z ruhomoju ridynoju / V. D. Kubenko, P. S. Koval'chuk, M. P. Podchasov // Dop. NAN Ukrai'ny. — 2010. — № 5. — S. 50—56. — (Serija "Fizyko-matematychni nauky").
8. *Barnjak M. Ja.* Pobudova rozv'jazkiv krajovyh zadach dlja rivnjannja Laplasa v oblastjah z kutovymy tochkamy / M. Ja. Barnjak // Problemy dynamiky ta stijkosti bagatovymirnyh system : zb. pr. In-tu matematyky NAN Ukrai'ny. — T. 4. — K. : In-t matematyky NAN Ukrai'ny, 2007. — S. 7—28.
9. *Trocenko V. A.* Kolebanija zhidkosti v osesimmetrichnom rezervuare s membranoj na svobodnoj poverhnosti / V. A. Trocenko, R. I. Bogun : zb. pr. In-tu matematiki NAN Ukraïni. — T. 5. — K. : In-t matematiki NAN Ukraïni, 2008. — S. 304—333.
10. *Faltinsen O. M.* Sloshing / O. M. Faltinsen, A. N. Timokha. — Cambridge : Cambridge University press, 2009. — 608 p.
11. *Bauer H. F.* Response of viscous annular liquid layer in zero-gravity to different axial excitations of the rigid boundary plates / H. F. Bauer // Applied Scientific Research. — 1992. — Vol. 49. — P. 283—305.
12. *Ibrahim R. A.* Liquid sloshing dynamics: theory and applications / R. A. Ibrahim. — Cambridge : Cambridge University Press, 2005. — 950 p.
13. *Miles J.* Nonlinear surface waves in closed basins / J. Miles // Journ. Fluid Mech. — 1976. — Vol. 75, № 3. — P. 419—448.